Задачи для подготовки к контрольной по курсу «Алгебра», 3-ой модуль
2021/2022-й учебный год, версия 1.

1. Является ли отображение $\phi : X \to Y$, где $X = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}, Y = \mathbb{Z}, \phi\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = a + b + c$, инъективным, сюръективным, биективным?

2. Является ли (a) группоидом, (b) полугруппой, (c) моноидом, (d) группой множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно операции $a \circ b = a + b - 5$? Ответ обосновать.

3. Является ли отображение $\phi(7^a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ гомоморфизмом групп, если первая группа — это множество $G = \{7^a, a \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения, а вторая группа — множество $H = \left\{\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}\right\}$ с операцией сложения? Является ли это отображение изоморфизмом?

4. Подгруппа G симметрической группы S_n порождена степенями подстановки
$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)$. Найти
(a) все элементы $g \in G$ такие, что $g^7 = id$;
(b) элементы g порядка 7,
и в каждом случае подсчитать их количество.

5. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_5[x]/\left\langle x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 3\right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс
$$f + \left\langle x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 3\right\rangle \in F.$$
Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение
$$\tfrac{2\,x^4+4\,x^2+3}{2\,x^3+2\,x^2} + \left(4\,x^6 + 3\,x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + 4\,x + 2\right)\left(3\,x^4 + 4\,x^3 + x^2 + 2\,x + 2\right) - \tfrac{x^3+3\,x^2+3\,x+2}{4\,x+1}$$

6. Пусть $f(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x, g(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x$ — многочлены над полем $\mathbb{Z}_{11}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что
$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_4$?

8. Найти базис и размерность линейного подпространства L в $\mathbb{R}^4$, заданного системой уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов $a_1 = (1, -1, 2, 1)^T, a_2 = (1, 2, 1, -1)^T, a_3 = (0, 3, -1, -2)^T, a_4 = (3, 3, 4, -1)^T, a_5 = (1, -4, 3, 3)^T$ в $\mathbb{R}^4$, выразить небазисные векторы через базисные.

10. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку векторов $a_1 = (1, 1, 2, 1, 2)^T, a_2 = (0, -1, -2, 1, -1)^T, a_3 = (3, 1, 2, 5, 4)^T$ в $\mathbb{R}^5$.

11. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1, V_2 в $\mathbb{R}^4$, $V_1 = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $V_2 = \langle b_1, b_2\rangle$, где $a_1 = (1, 0, -3, -2)^T, a_2 = (7, 1, 9, 14)^T, a_3 = (-4, 1, 2, -9)^T, b_1 = (10, 1, 0, 8)^T, b_2 = (-3, 0, 1, -3)^T$.

12. Вычислить матрицу перехода $C_{e\to\hat{e}}$ от базиса $e_1 = (-2, 1, -1)^T, e_2 = (1, -1, 3)^T, e_3 = (1, 2, -1)^T$ к базису $\hat{e}_1 = (-1, 2, 3)^T, \hat{e}_2 = (2, 1, 2)^T, \hat{e}_3 = (0, 2, 1)^T$, в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ и определить координаты вектора $x = -\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - \hat{e}_3$ в базисе e_1, e_2, e_3.

13. Доказать, что пространство является прямой суммой подпространств $L_1 = \langle a_1, a_2\rangle$, а $L_2 = \langle b_1, b_2\rangle$ и разложить вектор $x = (0, -2, 2, 0)^T$ на сумму проекций на эти подпространства, где $a_1 = (1, 1, 1, 0)^T, a_2 = (1, 1, 0, 1)^T, b_1 = (1, 0, 1, 1)^T, b_2 = (1, 1, -1, -1)^T$.

14. В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ билинейная форма $B(x, y)$ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу билинейной формы $B(x, y)$ в базисе $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Номера по задачнику “Сборник задач по алгебре” под редакцией А. И. Кострикина, издание 2009-го года:

64.41 (в). Доказать, что $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle \simeq \mathbb{C}$.

64.42. При каких a и b факторкольца $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + ax + b\rangle$

(a)изоморфны между собой;
(b)являются полями?

64.43. Изморфны ли факторкольца

$$\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+1\rangle,\ \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+2x^2+x+1\rangle\ ?$$

56.11. Найти порядок элемента x^k, если порядок элемента x равен n.

34.3 б). Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

$$1,\ \sin x,\ \cos x\ .$$

34.3 г). Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cdots,\ \cos nx\ .$$

34.4 а). Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

$$e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\ \cdots,\ e^{\alpha_n x}\ .$$

34.11 а). Доказать, что каждая из двух заданных систем векторов S и S' являются базисом. Найти матрицу перехода от S к S':

$$S=((1,2,1),(2,3,3),(3,8,2)), S'=((3,5,8),(5,14,13),(1,9,2))\ .$$

34.12. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ многочленов степени $\leqslant n$ с вещественными коэффициентами системы

$$\{1,x,\cdots,x^n\} \text{ и } \{1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n\},\ a\in\mathbb{R},$$

являются базисами, и найти координаты многочлена $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ в этих базисах и матрицу перехода от первого базиса ко второму.

37.6. Найти матрицу билинейной функции f в новом базисе, если заданы её матрица в старом базисе и формулы перехода:

$$(a)\ \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\quad \begin{aligned}e_1'&=e_1-e_2,\\ e_2'&=e_2+e_3,\\ e_3'&=e_1+e_2+e_3;\end{aligned}$$

$$(b)\ \begin{pmatrix}0&2&1\\-2&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix},\quad \begin{aligned}e_1'&=e_1+2e_2-e_3,\\ e_2'&=e_2-e_3,\\ e_3'&=-e_1+e_2-3e_3.\end{aligned}$$

25.7 а). Найти наибольший общий делитель и его выражение через f и g над полем $\mathbb{F}_2$:

$$f=x^5+x^4+1,\ g=x^4+x^2+1\ .$$