

Задачи по теории систем линейных уравнений

1. Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение), найдите ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

2. Можно ли заданную матрицу A представить в виде $A = LU$, где L — нижнетреугольная (то есть над диагональю нули) матрица с единицами на главной диагонали, а U — верхнетреугольная (то есть под диагональю нули) матрица? Если такое разложение возможно, то предьявите его, если нет, то объясните почему.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Номера по задачку “Сборник задач по линейной алгебре” под редакцией И. В. Проскуракова:

708. Пользуясь методом исключения неизвестных (то есть методом Гаусса), исследовать совместность и найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25, \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40, \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65, \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95. \end{cases}$$

742. Определить, какие из строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 25, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 40, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 65, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 95. \end{cases}$$

Задачи по подстановкам и комплексным числам

1. Разложить подстановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ в произведение циклов, выяснить ее четность. Определить порядок этой подстановки, вычислить σ^{744} .

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} (-2 + 4i)x + 3yi = -10 + 21i \\ (1 + 5i)x + (1 - 2i)y = 14 + 19i \end{cases}$.

3. Решить уравнение $z^2 - (7 + i)z + (18 + i) = 0$.

4. Пусть $z = -\sqrt{3} - i$. Вычислить значение $\sqrt[7]{z^3}$, для которого число $\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i}$ имеет аргумент $\frac{9\pi}{28}$. Найди модуль этого числа.

5. Найдите комплексные корни уравнения $z^6 + \frac{\sqrt{2}(i-1)}{\sqrt{3+i}} = 0$, для которых $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Номера по задачку “Сборник задач по алгебре” под редакцией А. И. Кострикина, издание 2009-го года:

- 20.4 г) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2z_1 - (2 + i)z_2 = -i, \\ (4 - 2i)z_1 - 5z_2 = -1 - 2i; \end{cases}$

22.7 к, л, м) Вычислить:

$$\frac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[6]{-27}} \sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$$

Задачи по аналитической геометрии

1. В ортонормированном базисе даны векторы $a\{1, 4, 1\}, b\{2, 1, 3\}, c\{-2, 0, 3\}$. Найти вектор y такой, что $y \perp a, (y, c) = 2, (y, b) = 9$.
2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p + 3q, b = p - 2q$, если $|p| = 2, |q| = 3, \widehat{(p, q)} = \frac{\pi}{3}$.
3. Даны вершины треугольника $A(-5, 3), B(7, 8), C(-2, -1)$. Составить уравнения следующих прямых: медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A . Система координат прямоугольная декартова.
4. Даны точки $E(2, 1, 0), F(0, 2, 1), G(1, 2, 0), H(1, 0, -2)$. Найти:
(а) объем пирамиды $EFGH$;
(б) длину высоты, проведенной из вершины H .
5. Проверить, что прямые $a : 2x = y + 1 = z + 2, b : x - 1 = 1 - y = z$ лежат в одной плоскости. Составить уравнение той плоскости.
6. Найти точку M' , симметричную точке $M(-1, 2, 0)$ относительно прямой $\frac{x+1/2}{1} = \frac{y+7/2}{-1/3} = \frac{z-2}{2}$.
7. Найти точку M' , симметричную точке $M(3, 3, 3)$ относительно плоскости $8x + 6y + 8z - 25 = 0$.
8. Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ и $x = 6t + 9, y = -2t, z = -t + 2$.

Следующие номера по задачку Г. Д. Ким и Л. В. Крицков "Алгебра и аналитическая геометрия, том I":

25.62 а) Доказать тождество

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

25.65. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ имело решение. Найти общее решение этого уравнения.

25.67. Рассматривается система уравнений

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{x}] = \mathbf{b}_1, [\mathbf{a}_2, \mathbf{x}] = \mathbf{b}_2,$$

В которой $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ – заданные векторы, причём \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 не коллинеарны.

Показать, что условия

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = 0, (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 0, (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = 0,$$

необходимы для разрешимости этой системы.

При выполнении указанных условий и условия $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) \neq 0$ найти общее решение системы.

27.33. Две плоскости заданы своими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1u + a_2v \\ y = y_1 + b_1u + b_2v \\ z = z_1 + c_1u + c_2v; \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_2 + a_3u + a_4v \\ y = y_2 + b_3u + b_4v \\ z = z_2 + c_3u + c_4v; \end{cases}$$

С помощью рангов матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

- 27.42. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+2y+3z-4=0$, $3x+z-5=0$ и отсекающей на осях Oy и Oz ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.
- 31.8. Написать уравнение прямой, лежащей в плоскости Oyz , параллельной оси Oy и отсекающей на оси Oz отрезок, равный 3.
- 33.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\mathbf{r}_1)$ и перпендикулярной прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$.
- 33.8. Найти точку пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ с плоскостью $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}u + \mathbf{c}v$.
- 33.15. Найти точку, симметричную точке $M_0(\mathbf{r}_0)$ относительно прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$.