

Список определений и формулировок по курсу «Алгебра»  
2021/2022 учебный год  
Версия 1. 12 мая 2022 г.

**1-й модуль**

1. Дать определение умножения матриц. Коммутативна ли эта операция? Ответ пояснить.
2. Дать определения ступенчатого вида матрицы и канонического (улучшенного ступенчатого) вида матрицы.
3. Перечислить элементарные преобразования строк матрицы.
4. Сформулировать теорему о методе Гаусса (алгоритм приводить не нужно).
5. Дать определения перестановки и подстановки.
6. Выписать общую формулу для вычисления определителя произвольного порядка с помощью подстановок.
7. Выписать формулы для разложения определителя по строке и по столбцу.
8. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Когда с их помощью можно найти решение СЛАУ?
9. Дать определение обратной матрицы. Сформулировать критерий её существования.
10. Выписать формулу для нахождения обратной матрицы.
11. Выписать формулу для матрицы обратной к произведению двух матриц?
12. Дать определение минора.
13. Дать определение базисного минора. Какие строки называются базисными?
14. Дать определение ранга матрицы.
15. Дать определение линейной комбинации строк. Что такое нетривиальная линейная комбинация?
16. Дать определение линейной зависимости строк матрицы.
17. Дать определение линейно независимых столбцов матрицы.
18. Сформулировать критерий линейной зависимости.
19. Сформулировать теорему о базисном миноре.
20. Сформулировать теорему о ранге матрицы.
21. Сформулировать критерий невырожденности квадратной матрицы.
22. Сформулировать теорему Кронекера–Капелли.

**2-й модуль**

1. Дать определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ.
2. Сформулируйте теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.
3. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.
4. Дайте определения модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента комплексного числа?
5. Что происходит с аргументами и модулями комплексных чисел при умножении и при делении?
6. Выпишите формулу Муавра.
7. Как найти комплексные корни  $n$ -ой степени из комплексного числа? Сделайте эскиз, на котором отметьте исходное число и все корни из него.
8. Сформулируйте основную теорему алгебры. Сформулируйте теорему Безу.
9. Какие многочлены называются неприводимыми?
10. Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над полем комплексных чисел.

11. Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над действительными числами.
12. Дайте определение векторного произведения векторов в трехмерном пространстве.
13. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.
14. Что такое уравнение поверхности и его геометрический образ?
15. Сформулируйте теорему о том, что задает любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве.
16. Что такое нормаль плоскости?

### **3-й модуль**

1. Какие бинарные операции называются ассоциативными, а какие коммутативными?
2. Дайте определения полугруппы и моноида.
3. Сформулируйте определение группы. Приведите пример.
4. Что такое симметрическая группа? Укажите число элементов в ней.
5. Что такое общая линейная и специальная линейная группы?
6. Сформулируйте определение абелевой группы. Приведите пример.
7. Дайте определение подгруппы. Приведите пример группы и её подгруппы.
8. Дайте определение гомоморфизма групп. Приведите пример.
9. Дайте определение изоморфизма групп. Приведите пример.
10. Дайте определение порядка элемента.
11. Сформулируйте определение циклической группы. Приведите пример.
12. Сколько существует, с точностью до изоморфизма, циклических групп данного порядка?
13. Что такое ядро гомоморфизма групп? Приведите пример.
14. Сформулируйте утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.
15. Дайте определение левого смежного класса по некоторой подгруппе.
16. Дайте определение нормальной подгруппы.
17. Что такое индекс подгруппы?
18. Сформулируйте теорему Лагранжа.
19. Сформулируйте три следствия из теоремы Лагранжа.
20. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.
21. Сформулируйте определение простой группы.
22. Дайте определение факторгруппы.
23. Что такое естественный гомоморфизм?
24. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.
25. Сформулируйте теорему о гомоморфизме групп. Приведите пример.
26. Что такое прямое произведение групп?
27. Сформулируйте определение автоморфизма и внутреннего автоморфизма.
28. Что такое центр группы? Приведите пример.
29. Что можно сказать про факторгруппу группы по её центру?
30. Сформулируйте теорему Кэли.
31. Дайте определение кольца.
32. Что такое коммутативное кольцо? Приведите примеры коммутативного и некоммутативного колец.

33. Дайте определение делителей нуля.
34. Какие элементы кольца называются обратимыми?
35. Дайте определение поля. Приведите три примера.
36. Дайте определение подполя. Привести пример пары: поле и его подполе.
37. Дайте определение характеристики поля. Привести примеры: поля конечной положительной характеристики и поля нулевой характеристики.
38. Сформулируйте утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.
39. Дайте определение идеала.
40. Сформулируйте определение гомоморфизма колец.
41. Сформулируйте теорему о гомоморфизме колец. Приведите пример.
42. Сформулируйте критерий того, что кольцо вычетов по модулю  $n$  является полем.
43. Сформулируйте теорему о том, когда факторкольцо кольца многочленов над полем само является полем.
44. Дайте определение алгебраического элемента над полем.
45. Сформулируйте утверждение о том, что любое конечное поле может быть реализовано как факторкольцо кольца многочленов по некоторому идеалу.
46. Дайте определение линейного (векторного) пространства.
47. Дайте определение базиса линейного (векторного) пространства.
48. Что такое размерность пространства?
49. Дайте определение матрицы перехода от старого базиса линейного пространства к новому.
50. Выпишите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.
51. Дайте определение подпространства в линейном пространстве.
52. Дайте определения линейной оболочки конечного набора векторов и ранга системы векторов.
53. Дайте определения суммы и прямой суммы подпространств.
54. Сформулируйте утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.
55. Дайте определение билинейной формы.
56. Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса?

#### **4-й модуль**

1. Дайте определение квадратичной формы.
2. Дайте определения положительной и отрицательной определенности квадратичной формы. Приведите примеры.
3. Дайте определения канонического и нормального вида квадратичной формы.
4. Сформулируйте критерий Сильвестра и его следствие.
5. Сформулируйте закон инерции квадратичных форм. Что такое индексы инерции?
6. Дайте определение линейного отображения. Приведите пример.
7. Дайте определение матрицы линейного отображения.
8. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базисов. Как выглядит формула в случае линейного оператора?
9. Сформулируйте утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.
10. Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора.
11. Дайте определения характеристического уравнения и характеристического многочлена квадратной матрицы.
12. Сформулируйте утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.

13. Дайте определение собственного подпространства.
14. Дайте определения алгебраической и геометрической кратности собственного значения. Какое неравенство их связывает?
15. Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям?
16. Сформулируйте критерий диагональности матрицы оператора.
17. Сформулируйте критерий диагоналируемости матрицы оператора с использованием понятия геометрической кратности.
18. Дайте определение евклидова пространства.
19. Выпишите неравенства Коши—Буняковского и треугольника.
20. Дайте определения ортогонального и ортонормированного базисов.
21. Дайте определение матрицы Грама.
22. Выпишите формулу для вычисления скалярного произведения в координатах, заданных в произвольном (не обязательно ортонормированном) базисе.
23. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису.
24. Как меняется определитель матрицы Грама (грамиан) при применении процесса ортогонализации Грама—Шмидта?
25. Сформулируйте критерий линейной зависимости с помощью матрицы Грама.
26. Дайте определение ортогонального дополнения.
27. Дайте определения ортогональной проекции вектора на подпространство и ортогональной составляющей.
28. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов.
29. Выпишите формулу для вычисления расстояния с помощью определителей матриц Грама.
30. Дайте определение сопряженного оператора в евклидовом пространстве.
31. Дайте определение самосопряженного (симметрического) оператора.
32. Как найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе?
33. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора?
34. Что можно сказать про собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям?
35. Сформулируйте определение ортогональной матрицы.
36. Сформулируйте определение ортогонального оператора.
37. Сформулируйте критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.
38. Каков канонический вид ортогонального оператора? Сформулируйте теорему Эйлера.
39. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов.
40. Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.
41. Сформулируйте утверждение о QR-разложении.
42. Сформулируйте теорему о сингулярном разложении.
43. Сформулируйте утверждение о полярном разложении.
44. Дайте определение сопряженного пространства.
45. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.
46. Дайте определение взаимных базисов.
47. Дайте определение биортогонального базиса.
48. Что можно сказать про ортогональное дополнение к образу сопряженного оператора?