

Вопросы с доказательством для подготовки к контрольной работе по курсу «Алгебра», 3-й  
модуль,  
2021/2022-й учебный год, версия 1.

1. Сформулируйте и докажите утверждение о связи порядка элемента, порождающего циклическую группу, с порядком группы.
2. Сформулируйте и докажите утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.
3. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа (включая две леммы).
4. Докажите, что гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда его ядро тривиально.
5. Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.
6. Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.
7. Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме групп.
8. Докажите, что центр группы является её нормальной подгруппой.
9. Сформулируйте и докажите утверждение о том, чему изоморфна факторгруппа группы по её центру.
10. Сформулируйте и докажите теорему Кэли.
11. Докажите, что характеристика поля может быть либо простым числом, либо нулем.
12. Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.
13. Сформулируйте и докажите критерий того, что кольцо вычетов по модулю  $n$  является полем.
14. Докажите, что ядро гомоморфизма колец является идеалом.
15. Сформулируйте и докажите утверждение о том, когда факторкольцо кольца многочленов над полем само является полем.
16. Выпишите и докажите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.
17. Выпишите формулу для преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса и докажите её.